同济大学 2005 年度高等数学竞赛试题

一. (20 分) 选择题

1. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导，且 $f(x) < g(x)$ ，则必有____B____.

（A） $f'(x) < g'(x)$ （B） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0} < \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\int_{x_0}^{x} g(t)dt}{x-x_0}$

（C） $f(-x) > g(-x)$ （D） $\int_{x_0}^{x} f(t)dt < \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ （ $\forall x$ ）

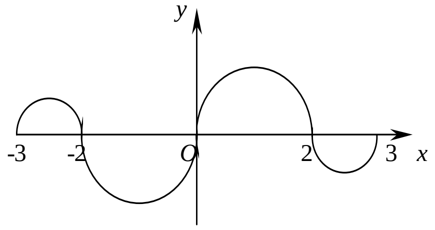
2. 设函数 $f(x)$ 满足: $f(x)= f(x+2)$，$f(0)=0$. 又在 $(-1,1)$ 内有 $f'(x)=|x|$，则 $f\left(3\frac{1}{2}\right)=$____A____.

（A） $-\frac{1}{8}$ （B） $\frac{1}{8}$ （C） $-\frac{1}{4}$ （D） $\frac{1}{4}$

3. 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$____C____.

（A） $xf(0)$ （B） $\frac{1}{2}f(x^2)$ （C） $xf(x^2)$ （D） $tf(x^2-t^2)$

4. 设连续函数 $y=f(x)$ 连续在区间 $[-3,-2]$、$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$、$[0,2]$ 上的图形分别是为直径为 2 的下、上半圆周（如右图所示）. 如果 $G(x)=\int_0^x f(t)dt$，那么以下____C____是正确的.



（A） $G(3)=-G(-3)$ （B） $G(3)=\frac{5}{4}G(2)$

（C） $G(-3)=\frac{3}{4}G(2)$ （D） $G(-3)=\frac{5}{4}G(-2)$

二.（10 分） 求由方程 $x^2+y^3-xy=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 在 $x>0$ 内的极值，并指出是极大值还是极小值.

解 隐函数求导法，得 $y'=\dfrac{y-2x}{3y^2-x}=0$，

令 $y'=0$，将 $y=2x$ 代入方程，得驻点 $x=\frac{1}{8}$.

此时 $y=\frac{1}{4}$，求出 $y''|_{x=\frac{1}{8},y=\frac{1}{4},y'=0}=-32$（$<0$），得知 $y=\frac{1}{4}$ 是极大值.

三. (10 分) 设曲线 Γ : $\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=x \end{cases}$ 的线密度 $\mu(x,y,z)=z$，求 Γ 的质量.

解 Γ 的参数方程

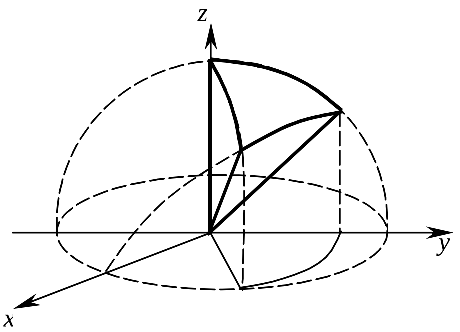
$$x=\cos^2\theta,\quad y=\cos\theta\sin\theta,\quad z=|\sin\theta|,\quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

（或　$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$，$y=\frac{1}{2}\sin\theta$，$z=\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$，$\theta\in[-\pi,\pi]$.）

$$M=\int_{\Gamma}zds=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\,d\theta=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2\theta}\,d(\cos\theta)=2\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt$$

$$=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

四. (15 分) 设 Ω 是八分之一球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$（$x\geq0$，$y\geq0$）与平面 $x=0$，$y=z$，$x=2y$ 所围成的立体，试求 Ω 的体积.



解　Ω 向 xOy 面投影：

D_{xy} 由 $x^2+2y^2=1$，$x=2y$，$x=0$ 围成.

$$V=\iint_{D_{xy}}\left[\sqrt{1-x^2-y^2}-y\right]d\sigma$$

$$=\int_{\arccos\frac{2}{\sqrt5}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}}\left[\sqrt{1-\rho^2}-\rho\sin\varphi\right]\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\arccos\frac{2}{\sqrt5}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{\sin^3\varphi}{\left(1+\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sin\varphi}{\left(1+\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\right]d\varphi=\frac{1}{3}\int_{\arccos\frac{2}{\sqrt5}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{\sin\varphi}{\left(1+\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{\sqrt2}{\sqrt5}\right)=\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin\frac{\sqrt2}{\sqrt5}\right).$$

或　球面锥体积 $V=\frac{1}{3}S\cdot R$（S 是锥的底面面积，球半径 $R=1$）

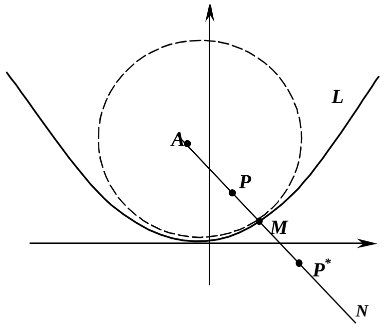
D_{xy} 由 $x^2+2y^2=1$，$x=2y$，$x=0$ 围成.

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}d\sigma=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}d\sigma=\int_{\arccos\frac{2}{\sqrt5}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$=\int_{\arccos\frac{2}{\sqrt5}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{\sin\varphi}{\left(1+\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}\right]d\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin\frac{\sqrt2}{\sqrt5}$$

故 $V=\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin\frac{\sqrt2}{\sqrt5}\right)$

五. (15 分) 曲线的对称点问题　设平面曲线 L 上一点 M 处的曲率半径为 ρ，曲率中心为 A. AN 是 L 在点 M 处的法线，法线上的两点 P 与 P^* 分居于 L 的两侧，即 P 位于 AM 上，P^* 位于 MN 上，如果 P 与 P^* 满足 $|AP||AP^*|=\rho^2$，称点 P 与 P^* 关于曲线 L 是对称的.



现设L的方程为$y=\dfrac{x^2}{2}$，点$P\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

（1）求点M，使得L在M处的法线经过点P，并写出法线的参数方程;

（2）求点P关于曲线L的对称点P^*.

解　（1）设$M(x,y)\in L$，$PM\perp$切线，则$\dfrac{y-1}{x-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{x}$，即$\dfrac{\frac{x^2}{2}-1}{x-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{x}$，

求出$x=1$，故$M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

法线方程$y-\dfrac{1}{2}=-(x-1)$，即$\begin{cases}x=-t+1\\ y=t+\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\left(\text{或}\begin{cases}x=-t+\dfrac{1}{2}\\ y=t+1\end{cases}\right)$.

（2）求出曲率半径$\rho=2\sqrt{2}$，　　求出曲率中心$A\left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$.

由$|AP||AP^*|=\rho^2$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{(2-t)^2+(t-2)^2}=\left(2\sqrt{2}\right)^2$，得$t=-\dfrac{2}{3}$或$t=\dfrac{14}{3}$（舍去），

故$P^*\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{1}{6}\right)$.

六.（15 分）设M_0是曲线C外一个定点，当点M在曲线C上移动时，直线M_0M扫出的轨迹称为锥面. M_0称为锥面的顶点，曲线C称为锥面的准线，直线M_0M则称为锥面的母线.

现设Σ是以点$M_0(0,3,1)$为顶点、以圆周C：$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$为准线的锥面.

（1）　写出Σ的方程;

（2）　设Ω是Σ与平面$z=0$所围成的锥体（如右图所示），如果Ω的密度为常数，$z=0$为地平面，那么如此放置的Ω会不会倾倒？试说明理由.

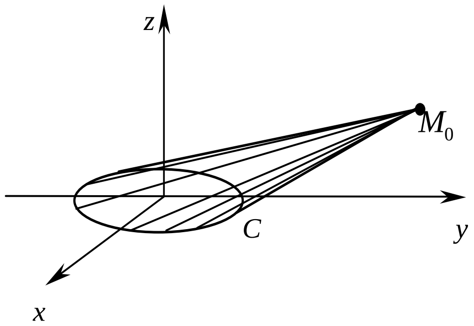
解

（1）设$M_1(x,y,z)\in\Sigma$，$M_2(x_0,y_0,0)\in C$，

$M_1M_2\parallel M_1M_0$，有$\dfrac{x_0-x}{-x}=\dfrac{y_0-y}{3-y}=\dfrac{-z}{1-z}$，

$x_0=\dfrac{x}{1-z}$，$y_0=\dfrac{y-3z}{1-z}$满足$x_0^2+y_0^2=1$，

故Σ的方程为　$x^2+(y-3z)^2=(1-z)^2$.



（2）设Ω的重心在$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，显然$\bar{x}=0$.

$$V=\iiint_{\Omega}dV=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint_{\Omega}ydV=\int_0^1dz\iint_{D_z}ydxdy=\int_0^1dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1-z}(3z+\rho\sin\varphi)\rho d\rho=3\pi\int_0^1z(1-z^2)dz=\frac{\pi}{4},$$

$\bar{y}=\dfrac{\iiint_{\Omega}ydV}{V}=\dfrac{3}{4}$.由于$(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$在底面内，故$\Omega$不会倾倒.

七. (15 分)　若D是xOy面上的无界区域，$f(x,y)$是D上的连续函数. $\forall R>0$，

$D_R = D \bigcap \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$，如果极限 $\lim\limits_{R\to+\infty} \iint\limits_{D_R} f(x,y)d\sigma$ 存在，则称该极限是 $f(x,y)$ 在 D 上的（Cauchy）二重反常积分，并记作 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$，即

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{D_R} f(x,y)d\sigma .$$

设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 xOy 面上有连续的偏导数，且对 $(x,y) \ne (0,0)$，有 $\sqrt{[P(x,y)]^2 + [Q(x,y)]^2} \le \dfrac{M}{x^2+y^2}$（$M$ 为常数），证明（Cauchy）二重反常积分

$$\iint\limits_{xOy面} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0 .$$

解　设 $D_R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$，$C_R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = R^2\}$则按定义及格林公式，有

$$\iint\limits_{xOy面} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{D_R} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \lim_{R\to+\infty} \oint\limits_{C_R} Pdx + Qdy \quad .$$

又 $\left|\oint\limits_{C_R} Pdx + Qdy\right| \le \oint\limits_{C_R} \sqrt{P^2+Q^2}\,ds \le \oint\limits_{C_R} \dfrac{M}{x^2+y^2} ds = \dfrac{2\pi M}{R} \to 0$（$R \to +\infty$）

故 $\iint\limits_{xOy面} \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0$